वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

लघुपुस्तिका

1. गणित म्हणजे 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
2. Sin 90 = 1 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
3. त्रिकोणमिती आणि आलेख	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
4. हत्तीचा उंदीर	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
5. साक्षर भूमिती	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00

आगामी

❊ काही पत्रिका आणि काही लघुपत्रिका

❊ काही कृतिपत्रिका





गणित

लघुपुस्तिका क्र. 04

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई-412 803.

दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com

हत्तीचा उंदीर

प्रा. मनोहर रामचंद्र राईलकर

वाई तालुका गणित अध्यापक, मंडळ

वाई

अक्षरजुळणी
प्रा. मनोहर राईलकर पुणे

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरुण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री. दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
16 जानेवारी 2011

लेखक
प्रा. मनोहर राईलकर
56, मृण्मयी जेधेनगर,
बिबवेवाडी, पुणे-37
दूरध्वनी: (020) 24420566

मुद्रक
सरस्वती ऑफसेट
275 क, मंगळवार पेठ, सातारा.
दूरध्वनी : (02162) 284430

मूल्य रुपये - **20/-**

हत्तीचा उंदीर

प्रास्ताविकः

हत्तीचा उंदीर? हा काय प्रकार आहे बुवा? असं तुमच्या मनात आलं असलं तर स्वाभाविक आहे. पण, पुस्तक वाचलंत की उलगडा होईल. तत्पूर्वी गुरुजींचं स्मरण करू यात.

गुरुर् ब्रह्मा गुरुर् विष्णुः गुरुर् देवो महेश्वरः।
(किंवा गुरुब्रह्मा गुरुर्विष्णुर्गुरुदेवो महेश्वरः।)
गुरुस् साक्षात्परब्रह्म तस्मै श्रीगुरवे नमः।।

(अलीकडे हा श्लोक म्हणताना लोक फार चुका करतात. वर दिलेला श्लोक अगदी बरोबर आहे. फक्त संधी केले नाहीत. मात्र, म्हणायचा असेल तर तो असाच म्हणा.)

कोणत्याही कार्यारंभी गुरुजींचं स्मरण करावं, असं म्हणतात. तसं मी करीत आहे. पण ते गुरु कुणी काल्पनिक आणि धार्मिक गुरु नव्हते. तर प्रत्यक्षात माझे गुरुजी म्हणजे शिक्षक होते. साठ वर्षांहून अधिक काळ लोटला. १९५० साली मुंबईच्या सें. झेवियर महाविद्यालयात मी बीएस्सीच्या शेवटच्या वर्षाला होतो. विषय संपूर्ण गणित. आणि फक्त गणित. गणिताच्या आठ प्रश्नपत्रिका होत्या. त्यातल्या दोन, आता म्हटलं, ते गुरुजी आम्हाला शिकवायचे. त्यांचं नाव फादर लुई व्हिऑन (Vion). ते फ्रेंच पाद्री होते. त्याच वेळी ते सत्तर वर्षांचे होते. त्यामुळं ते आता हयात असणं शक्यच नाही. एरवीच गुरुजनांचे प्रत्येक शिष्यावर उपकार असतात. पण आमच्या ह्या गुरुजींचे आमच्यावरचे उपकार खरोखरच कधी न फिटणारे आहेत. उदाहरणं सोडवण्याची अशी काही विलक्षण दृष्टी त्यांनी आम्हाला दिली की ती जन्मात विसरता येणार नाही. तीच तर मी तुम्हाला देऊ इच्छितो. म्हणून मुलांमुलींनो, हे पुस्तक मी फक्त तुमच्याकरताच लिहिलं आहे.

बहुधा उदाहरणं धोपट मार्गानं सोडवली जातात. नीट विचार केला तर धोपटमार्गापेक्षा चांगल्या चांगल्या युक्त्या, रीती कुणालाही सुचू शकतात. तशी दृष्टी आपल्याला फक्त गुरुजीच देऊ शकतात. तशी आमच्या

गुरुजींनी आम्हाला दिली. एका अगदी साध्या उदाहरणानं सुरुवात करू.

उदा. 1: बाजू 123, 164 आणि 205 आहेत, असा त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे, असं दाखवा. तुम्ही म्हणाल हे तर अगदी सरळ उदाहरण आहे. पहिल्या दोन संख्यांचा वर्ग करून त्यांची बेरीज करा आणि ती तिसऱ्या संख्येच्या वर्गाइतकी येते की नाही ते पडताळून पहा. धोपटमार्ग!

हे सारं बोलायला सोपं आहे. पण ह्या तीन अंकी तीन संख्यांचा वर्ग करणं काही साधं सोपं काम नाही. फा. व्हिऑनचे विद्यार्थी काय करतील? सर्वांना 41 नं भागतील. मग संख्या आल्या 3, 4 आणि 5! झालंच की.

कदाचित काही परीक्षकांना असं उत्तर चालणार नाही. मी विचारीन, 'का? माझ्या रीतीत काय चुकीचं आहे?' ज्याअर्थी सर्वच संख्यांना मी एकाच संख्येनं भागलं त्याअर्थी मिळालेल्या त्रिकोणाच्या बाजू मूळ त्रिकोणाच्या बाजूंशी प्रमाणात असणार. म्हणून तो त्रिकोण दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असला पाहिजे. आणि मिळालेला त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे, हे तर सरळच आहे. म्हणून दिलेला त्रिकोणही काटकोन त्रिकोणच असणार. तरीही, अशा परीक्षकांकरता आपण एक निराळीच युक्ती करू. पहा.

$123^2 + 164^2 = (41x3)^2 + (41x4)^2 = 41^2(3^2 + 4^2) = 41^2x5^2 = (41x5)^2 = 205^2$ आलं की उत्तर! म्हणजे आपण तीन अंकी संख्यांचा वर्ग तर केलाच नाही. पण 41चाही वर्ग केला नाही. 41^2 असंच ठेवलं

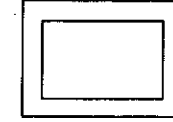
ह्या दोन्ही युक्त्यांचा अर्थ, आपण **हत्तीचा उंदीर** केला. भल्या मोठ्या उदाहरणाचं लहान उदाहरण करून मग ते सोडवलं. आणि आपले कष्ट कमी केले, वेळ वाचवला. आणि संख्या लहान केल्यामुळं चुकांची शक्यता टळली. एकदा ही दृष्टी तुम्हाला आली की तुम्हालाही अशा युक्त्या सुचायला लागतील. पण, त्याकरता असा विचार केला पाहिजे.

कथेकरीबुवा कीर्तनात एक गमतीची कथा सांगायचे. गणपतीचा मोठा भाऊ कार्तिकेय. गणपती तर लट्ठ. तो काय आपल्या बरोबरीनं पळणार, असं मनात येऊन त्यानं गणपतीला शर्यतीचं आव्हान दिलं. 'चल आपण पृथ्वीप्रदक्षिणा करू. कोण जिंकतं ते पाहू.' गणपती तयार झाला. आणि कार्तिकेयानं धावायला सुरुवात केली. पण मागं वळून पाहिलं तर गणपती बसूनच राहिला होता. तो मनातल्या मनात हसला. एका बाजून जाऊन

कार्तिकेय दुसऱ्या बाजूनं येताना गणपतीला दिसला. त्यासरशी त्यानं चटकन आईला प्रदक्षिणा घातली. कार्तिकेयाला तो म्हणाला, 'आईला प्रदक्षिणा घालणं हे पृथ्वीप्रदक्षिणेसमान श्रेष्ठ मानलं जातं. तेव्हा मीच जिंकलो.' ह्यातली गंमत सोडा. पण गणपतीनं डोकं वापरलं. नाही तरी तो मोठ्या डोक्याचा होताच! आपणही वरच्या उदाहरणात वापरलं आहे. इथून पुढं तुम्हीही वापरायला शिकणार ना?

उदा. 2: 80 मीटर लांब आणि 60 मीटर रुंद अशी एक आयताकृती बाग असून तिला आतून कडेनं जाण्याकरता, कचरागाड्या नेण्याकरता, फरशी बसवायची आहे. फरशी बसवल्यानंतर जागेचं अर्ध क्षेत्र रोपांसाठी शिल्लक राहावं अशी अपेक्षा आहे. तर फरशीची रुंदी किती मीटर असायला हवी?

पुढीलप्रमाणं आकृती काढू.



बागेकरता उपलब्ध असलेल्या जागेचं क्षेत्रफळ 60x80 = 4800 चौ. मी. त्याच्या अर्धं म्हणजे 2400 चौ. मी. फरशीची रुंदी x मानू. मग फरशीची जागा सोडल्यानंतर राहणाऱ्या जागेची लांबी $80-2x$ आणि रुंदी $60-2x$ येईल. म्हणून क्षेत्रफळ $= (80-2x)(60-2x) = 2400$, असं समीकरण मिळेल. सोडवून, 4नं भागून $x^2 - 70x + 600 = 0$, असं मिळेल. ज्यांची बेरीज 70 येईल असे 600 चे दोन अवयव शोधा पाहू! धोपटमार्ग!

हे काम किती वेळखाऊ आहे, ते तुम्ही सहज ओळखाल. मग काय करायचं? हत्तीचा उंदीर करायचा. दिलेल्या आयताच्या प्रमाणात ज्याच्या बाजू असतील असा एक छोटा आयत घ्यायचा. आपण दोन्ही संख्यांना 20 नं भागू. मग 4x3 चा छोटा आयत मिळेल. त्याचं क्षेत्रफळ 12. त्याच्या अर्धं म्हणजे 6. मग समीकरण $(4-2x)(3-2x) = 6$. आता $2x$ ला y नाव देऊ. मग समीकरण $(4-y)(3-y) = 6$ असं मिळेल. किंवा सोडवून $y^2 - 7y + 6 = 0$, असं मिळेल. अवयव पाडून $(y-1)(y-6) = 0$. पण 6 हे उत्तर निरुपयोगी. म्हणून $y = 1$, त्यावरून $x = 1/2$. म्हणून फरशीची रुंदी असेल $20x1/2 = 10$ मी. आणि उपलब्ध जागा 60 x 40.

उदा. 3: एक गाडी काही एका वेगानं जात आहे. पण तिचा वेग ताशी 10 किमीने वाढवला तर 300 किमी जाण्यास तिला 1 तास कमी लागेल. तर तिचा वेग किती?

रीत 1: गाडीचा वेग v मानू. तेव्हा नंतरचा वेग v + 10 राहील. आधी लागणारा काळ नंतर लागणाऱ्या काळापेक्षा 1 तासानं अधिक आहे. म्हणून 300/x - 300/(x + 10) = 1, असं समीकरण मिळेल. हे समीकरण मिळण्याकरता x, x + 10 यांचा लसावि काढण्याऐवजी 'x(x + 10) नं गुणा,' असं म्हणा. मग उत्तर x(x + 10) = 3000 येईल. सोपं रूप दिलं की समीकरण $x^2 + 10x - 3000 = 0$, असं येतं. ज्यांच्यांतला फरक 10 येईल असे 3000 चे अवयव शोधायचे. हे किती कठिण काम आहे! धोपटमार्ग!

आता ह्या हत्तीचा उंदीर कसा करायचा? तर x = 10y लिहा. पहा काय होतं, ते. तुम्हाला y(y + 1) = 30 असं सोपं समीकरण मिळेल. हे समीकरणसुद्धा $y^2 + y - 30 = 0$ असं न सोडवता होतं तसंच ठेवायचं. ज्यांच्यांतला फरक 1 आहे असे 30 चे दोन y, y + 1 अवयव हवेत. म्हणून y = 5 आणि x = 50 किमी/तास असं उत्तर मिळतं.

रीत 2: ह्याच उदाहरणात आपण 10 किमीचा एकक मानला म्हणजे डेकामीटरचं माप धरलं तर अंतर 30 डेमी. किंवा एकक होईल आणि वेग 1 डेकामीटरनं वाढवला तर 1 तास कमी लागतो, असं म्हणता येईल. याचाच अर्थ 30 चे असे दोन अवयव हवेत की एक अवयव 1 नं वाढवला तर दुसरा 1 नं कमी होईल. असा अवयव म्हणजे 5 डेमी हाच. म्हणून वेग ताशी 50 किमी. जास्त चिकित्सकांकरता आणखी एक अवयव y = -6 हा आणि त्याचा जोडीदार y+1 = -5 हा. पण ऋण संख्या आपल्याला नकोत. (का?)

उदा. 4: एका काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या बाजूंपैकी एक दुसरीपेक्षा 4 सेमी ने मोठी आहे. त्याचं क्षेत्रफळ 160 चौ. सेमी असेल तर त्याच्या बाजू काढा.

ह्याच दोन बाजूंच्या गुणाकाराच्या निम्मे म्हणजे क्षेत्रफळ. म्हणून क्षेत्रफळाच्या दुप्पट म्हणजे बाजूंचा गुणाकार. म्हणजेच 160 च्या दुप्पट किंवा 320 त्या दोन बाजूंच्या गुणाकाराइतकं येईल. हे तुम्ही धोपटमार्गानं सोडवा. पण मी त्याचा उंदीर करून सोडवीन. कसं? दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप, पण बाजू 1/4 असतील असा एक छोटा त्रिकोण घेऊ. मग काटकोन करणाऱ्या बाजूंमधील फरक 1 सेमी येईल. आणि क्षेत्रफळ मूळ त्रिकोणाच्या 1/16 = 10 चौ. सेमी येईल. (क्षेत्रफळ वर्गाच्या प्रमाणात बदलतं, हे लक्षात घ्या.) दोन बाजूंचा गुणाकार ह्याच्या दुप्पट म्हणजे 20 येईल. मग 20 चे असे दोन भाग सांगा की त्यांच्यांतला फरक 1 येईल. तुम्ही म्हणाल सरळ आहे, 4 आणि 5 (किंवा -5, -4) एकक असे दोन भाग असतील. म्हणून मूळ त्रिकोणाच्या बाजू ह्यांच्या चौपट असतील. किंवा 16, 20 सेमी असतील.

उदा. 5: 'हत्तीचा उंदीर' मालिकेतील आता सांगत असलेलं, हे उदाहरण फारच छान आहे. हेही दहावीच्या परीक्षेत विचारलं होतं. एका बुलेट ट्रेनचा वेग ताशी 70 किमीनं वाढवल्यास तिला 2100 किमी अंतर जाण्यास 5 तास कमी लागतात. तर तिचा (आधीचा) वेग किती?

आदर्श उत्तरातील रीतीनं समीकरण $x^2 + 70x - 29400 = 0$ असं दिलं होतं. आता, असं पहा. ज्यांची वजाबाकी 70 येईल असे 29400 चे दोन अवयव धोपटमार्गानं शोधणं काय सोपं आहे का? तेही परीक्षेचा ताण असलेल्या वातावरणात? पण, आपण ह्या हत्तीचा उंदीर केला तर? 'कसा?' तुम्ही विचाराल. त्याची बरीच उत्तरं आहेत. आपण ती टप्प्याटप्प्यानं पाहू.

पहिली पायरी: वेग वाढवल्यास 2100 किमी अंतराकरता 5 तास कमी लागतात तर 1 तास कमी लागण्याकरता किती अंतर? उत्तर सरळ आहे, 2100/5 म्हणजे 420 किमी. मात्र, इतक्यानं हत्तीचा उंदीर होत नाही, फार तर बैल केला असं म्हणता येईल. कारण त्यामुळं समीकरण $x^2 + 70x - 70.420 = 0$ असंच होतं. धोपटमार्ग! तुम्ही स्वतः करून पहा. म्हणून प्रश्न असा की आपले श्रम आणखी कमी करता येतील का? (70.420 असंच का ठेवलं ते नंतर पाहू.)

दुसरी पायरी: 70 किमी अंतराला आपण 1 एकक अंतर मानू. मग 420 किमी अंतर केवळ 6 एकक होईल. आणि समीकरण $x^2 + x - 6 = 0$ असं होऊन जाईल. झाला का नाही उंदीर? आता x च्या -3, 2 अशा किमती मिळतील. 2 एकक म्हणजे ताशी 140 किमी वेग असं उत्तर येतं.

तिसरी पायरी: आपल्या लहान केलेल्या प्रश्नाचं शाब्दिक रूप काय? जर वेग 1 एककानं वाढवला तर 6 एकक अंतरात 1 तास कमी लागतो. आपण

आता वेग v नं दाखवू आणि वेळ t नं दाखवू. म्हणजे आपल्याला vt = (v+1)(t-1) = 6 असं हवं आहे. शब्दांत सांगायचं तर 6 चे असे दोन अवयव हवेत की त्यातला एक (वेग) 1 नं वाढवला की दुसरा (वेळ) 1 नं कमी व्हावा. सांगा पाहू. असा अवयव. तुम्ही म्हणाल, हात्तीच्या (किंवा उंदराच्या). उत्तर 2 एकक आहे. म्हणजेच मूळ वेग 2.70 = 140 किमी आहे. (किंवा -3)

चौथी पायरी: आदर्श उत्तरपत्रिका देणाऱ्यांनी $x^2 + 70x - 29400 = 0$ असं समीकरण दिलं होतं ना? ठीक आहे. आता ह्याच्यातच x = 70y लिहा. मग समीकरण कसं दिसेल? $70^2y^2 + 70.70y - 29400 = 0$ सर्वांतून 70.70 चा लोप केल्यास आपल्याला $y^2 + y - 6 = 0$ असंच समीकरण मिळेल! म्हणजे असाही उंदीरच आणि तसाही उंदीरच!

टीप: 29400 = 70.420 करून मिळाली होती. म्हणून मी गुणाकार केला नाही. पहिली पायरी 5 नं भागून आणि दुसरी पायरी x = 70y लिहून

$$\frac{2100}{x} - \frac{2100}{x+70} = 5 \quad \frac{420}{x} - \frac{420}{x+70} = 1$$

त्यावरून x = 70y) नं लिहून किंवा $\frac{6}{y} - \frac{6}{y+1} = 1$, 6(y+1 - y) = y(y+1) किंवा सोडवून $y^2 + y - 6 = 0$. एक सूचना गुणाकार भागाकार गरज पडत नाही तोवर करायचेच नाहीत. मी पहिल्या पायरीत केलंच आहे.

ह्याचं आणखी एक उद्बोधक पण लहानसं उदाहरण देतो. समजा काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण 65 आणि आणखी एक बाजू 63 आहेत. तर तिसरी बाजू किती? नेहमीप्रमाणं तिसऱ्या बाजूचा वर्ग = $65^2 - 63^2$ = (65-63)(65+63) = 2 x 128. हा शेवटचा गुणाकार आणि मग त्याचा वर्गमूळ हा उपद्व्याप करायचाच नाही. तर 2 x 128 = 2x2x64 म्हणून तिसरी बाजू 2x8 = 16 असं उत्तर चटकन मिळतं.

उदा. 6: दोन अंकी एक संख्या आणि तिच्यापासून अंकांची अदलाबदल करून मिळालेली संख्या ह्यांचं गुणोत्तर 4:7 आहे. अंकांची बेरीज 12 आहे. तर ती संख्या शोधा.

धोपटमार्ग: संख्येतील दशक स्थान आणि एकक स्थानाचे अंक x, y माना.

मग संख्या 10x+y आणि अंकांची अदलाबदल करून मिळणारी संख्या 10y+x असेल. म्हणून 10x+y:10y+x = 4:7 मिळेल. आणि x+y = 12. पुढचं तुम्ही सोडवू शकाल. म्हणून देत नाही. किचकटपणा अनुभवा.

रीत 2: दिलेली संख्या लहान आहे आणि अंकांची बेरीज 12 आहे. म्हणजे संख्या 39, 48, 57 ह्यांपैकीच एक असली पाहिजे. पण दिलेल्या प्रमाणावरून दिलेल्या संख्येला 4 नं भाग जातो, असं दिसतं. म्हणून 48 हीच संख्या असली पाहिजे. इथं तर आपण कसलीच आकडेमोड केली नाही. पण आपल्या मांडणीत कुठंच दोष नाही. मग उंदीर कसला? उंदराचं पिल्लूच!

रीत 3: बाकी सर्व वरीलप्रमाणंच. अंकांची बेरीज 12 म्हणजे संख्येला 3 नंही भाग जातो. आणि 4 नंही जातो. म्हणजे 12 नं भाग जातो. म्हणून संख्या 48 हीच. उंदराचं धाकटं (भावंड) पिल्लू!

आता सांगा, ह्या रीती पाहिल्यावर तुम्हाला गंमत वाटली की नाही? मग अशा रीती का वापरायच्या नाहीत? कोण उत्तर देईल?

उदा. 7: $c^2 + d^2 = 80$, cd = 32, तर c, d काढा. पहिला राशी वर्ग आहे आणि दुसरा राशी दोन संख्यांचा गुणाकार आहे. म्हणजे त्याचा घातही 2 हाच आहे. म्हणून आपण दोघांनाही 16 नं भागून घेऊ. मग $c^2 + d^2 = 5$, cd = 2 असं मिळेल. इतक्या माहितीवरून तुम्हाला ओळखता आले का? c = 2, d = 1 असं सांगता येतं की नाही? पण, आपण घात 2 असल्यानं 16 नं भागलं होतं. c, d ह्यांचे घात 1 आहेत. म्हणून आता 4 नं गुणलं पाहिजे. त्यामुळं c = 8, d = 4, असं उत्तर मिळेल. ताळा करून पहा.

काही मुलांच्या ही रीत नीट लक्षात आली नसेल. म्हणून आपण निराळी नावंच घेऊ. c = 4p, d = 4q असं लिहू. मग $c^2 + d^2 = 80$, आणि cd = 32 यांच्याऐवजी $16p^2 + 16q^2 = 80$, 16pq = 32 असं किंवा $p^2 + q^2 = 5$, pq = 2 असं आधीसारखंच उत्तर मिळेल. मग p = 2, q = 1 असं आणि मग c = 8, d = 4 असं उत्तर मिळेल. आता कळलं ना?

उदा. 8: एका काटकोन त्रिकोणाची परिमिती 60 असून कर्ण 25 आहे. तर त्याच्या बाजू शोधा.

ह्या त्रिकोणाशी समरूप पण आकारानं लहान असा दुसरा काटकोन त्रिकोण घेऊ. कितीनं भागूया? मला वाटतं आपण 5 नं भागावं. पाहू तर खरं

काय होतं ते. मग परिमिती 12 आणि कर्ण 5 असतील. ह्यावरून उरलेल्या दोन बाजूंची बेरीज $12 - 5 = 7$ असली पाहिजे, हे उघड आहे. कर्ण5 असून त्रिकोण काटकोन आहे. त्याअर्थी इतर दोन बाजू 3, 4 अशाच असल्या पाहिजेत, हेही उघड आहे. पण आपण सर्व बाजूंना 5 नं भागलं होतं. तर आता 5 नं गुणून टाकू. म्हणून मूळच्या त्रिकोणाच्या बाजू, 15, 20 असल्या पाहिजेत, हे स्पष्ट आहे.

उदा. 9: एका काटकोन त्रिकोणाची काटकोन करणारी एक बाजू दुसरीच्या दुपटीहून 4 सेमीनं अधिक आहे. क्षेत्रफळ80 चौ. सेमी आहे. तर त्याच्या ह्या दोन बाजू काढा.

इथंही आपण समरूप काटकोन त्रिकोण घेऊ. एक बाब लक्षात ठेवा जर बाजू विशिष्ट प्रमाणात वाढवली किंवा कमी केली तर क्षेत्रफळ त्या प्रमाणाच्या वर्गानं वाढतं किंवा कमी होतं. आता बाजू 1/4 करू. मग क्षेत्रफळ 1/16 इतकं होईल. त्यामुळं आधीच्या हत्तीचा असा छोटा उंदीर केल्यासारखं होईल. आता प्रश्न कसा झाला? पहा -

एका काटकोन त्रिकोणाची काटकोन करणारी एक बाजू दुसरीच्या दुपटीपेक्षा 1 नं अधिक आहे. आणि क्षेत्रफळ 5 आहे. तर बाजू शोधा. काटकोन त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या गुणाकाराच्या निम्मं असतं. ह्या वरून त्या बाजूंचा गुणाकार क्षेत्रफळाच्या दुप्पट असतो, हे तुम्हाला माहीत आहे. म्हणजे गुणाकार 10 आहे, असं ठरतं. लहान बाजू x मानू मग मोठी बाजू $2x + 1$ इतकी येईल. त्यांचा गुणाकार $x(2x + 1)$ येईल. म्हणून समीकरण $x(2x + 1) = 10$. $2x^2 + x - 10 = 0$ असं मिळेल. ज्यांची वजाबाकी 1 येईल असे $10x2 = 20$ चे दोन अवयव 5, 4 असतील, हे सरळ आहे. म्हणून एक बाजू 2 आणि दुसरी बाजू 5 अशा मिळतील. म्हणून मूळ त्रिकोणाच्या बाजू 8, 20. (कधी कधी हत्ती तसाच ठेवणं सोपं जातं.)

युक्ती: $x(2x + 1) = 10$ हेच समीकरण आपण दोन्ही बाजूंना 2 नं गुणून $2x(2x + 1) = 20$ असं लिहू. $2x$, $2x + 1$ ह्या संख्या लगतच्या असून त्यांचा गुणाकार 20 आहे. म्हणजेच त्या संख्या 4, 5 असणार. किंवा $2x = 4$.

जर असा उंदीर केला नसता, तर समीकरण $x(2x + 1) = 160$ किंवा $2x^2 + 4x - 160 = 0$ असं किंवा $x^2 + 2x - 80 = 0$ असं आलं असतं.

म्हणजेच धोपटमार्ग! त्यापेक्षा आपलं काम थोडं लहान झालं.

उदा. 10: आता काहीसं ह्याच प्रकारचं आणखी एक उदाहरण पाहू.

एका आयताकृती शेताची लांबी, रुंदीच्या दुपटीहून 5 मी.नं कमी आहे. त्याचं क्षेत्रफळ 700 चौ.मी. आहे. तर त्याची लांबी, रुंदी काढा.

आपण 5 मी.चा एक एकक करू. मग क्षेत्रफळाकरता $5^2=25$ नं भागावं लागेल. त्यामुळं उदाहरण असं होईल -

एका आयताकृती शेताची लांबी रुंदीच्या दुपटीहून 1 एककानं कमी आहे. त्याचं क्षेत्रफळ (25 नं भागून) 28 चौ. एकक आहे. रुंदी x एकक मानू. मग लांबी $2x-1$ एकक होईल. आणि समीकरण $x(2x-1) = 28$ असं होईल. किंवा $2x^2 - x - 28 = 0$ असं होईल. म्हणजे ज्यांच्यातला फरक 1 असेल असे $2x28 = 56$ चे दोन अवयव हवेत. सरळ आहे नाही का? 7, 8 हेच दोन अवयव. म्हणून समीकरण $(2x - 8)(x + 7) = 0$ असं होईल. म्हणून $x = 4$ मिळेल. त्यावरून मूळ उदाहरणाकरता रुंदी 20 आणि लांबी 35 असं उत्तर मिळेल. पडताळा घेता?

युक्ती: $x(2x-1) = 28$ च्या दोन्ही बाजूंना 2नं गुणू. म्हणजे $2x(2x-1) = 56$ असं समीकरण मिळेल. $2x$, $2x-1$ ह्या दोन संख्या लगतच्या नैसर्गिक संख्या आहेत. 56 चे असे दोन अवयव सांगा. सरळ आहे. उत्तर $2x=8$ येतं.

उदा. 11: लगतच्या ज्या दोन सम संख्यांच्या वर्गांचा गुणाकार 52 आहे, त्या शोधा.

त्या सम संख्यांच्या निम्मे केल्यावर आपल्याला लगतच्या नैसर्गिक संख्या मिळतील. आणि मग त्यांच्या वर्गांची बेरीज चौथ्या हिश्श्याइतकी म्हणजे 13 येईल. ह्यावरून लगतच्या संख्या 2, 3 असणार हे सरळ दिसतं. म्हणून विचारलेल्या संख्या 4, 6 आहेत.

उदा. 12: थोडंसं ह्याच प्रकारचं उदाहरण पाहू. दोन नैसर्गिक संख्यांची बेरीज 21 असून त्यांच्या वर्गांची बेरीज261 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

3 समाईक अवयव दिसतो आहे. त्यामुळं बेरजेला 3 नं भागून आणि वर्गांच्या बेरजेला 9 नं भागून उदाहरण पुढीलप्रमाणं होईल.

दोन संख्यांची बेरीज 7 असून त्यांच्या वर्गांची बेरीज 29 आहे. 7 चे 2, 5 हे दोन तुकडे अगदी सहज ओळखता येतील. म्हणून विचारलेल्या

संख्या, 3 नं गुणून 6 आणि 15 ह्या होत. (पडताळा घ्या की!)

उदा. 13: एका बागेत आंब्याची झाडं आयताकृती लावली आहेत. रुंदीत जितकी झाडं आहेत, त्यापेक्षा 5 झाडं लांबीत अधिक आहेत. एकूण झाडं 1400 आहेत. लांबीत आणि रुंदीत किती किती झाडं असतील?

हे उदाहरण तुम्ही धोपटमार्गानं सोडवून पहा. पण, हत्तीचा उंदीर करण्याकरता, मी 5 झाडांचा एक गट असं करतो. म्हणजे लांबीरुंदीचा विचार केला तर गटात लांबीरुंदीत प्रत्येकी5 झाडं असतील. म्हणजे प्रत्येक गटात 25 झाडं. म्हणून 1400 ला 25 नं भागायला हवं. मग एकूण गटांची संख्या मिळेल. ती 56 येते. आणि लांबीत 1 गट अधिक असेल. म्हणजे 56 ही संख्या लगतच्या दोन संख्यांचा गुणाकार असणार. उत्तर आलं रुंदीत7 आणि लांबीत 8 गट. किंवा 5 नं गुणून, रुंदीत 35 आणि लांबीत 40 झाडं.

उदा. 14: 30 सेमी लांब आणि 25 सेमी रुंद असलेल्या पत्र्याचे चार सारखे कोपरे चौरसाकृती असे कापायचे की बाकीचा पत्रा वळवून ज्याचा तळ 300 चौ. सेमी क्षेत्रफळाचा असेल असा डबा करता येईल.

आपण लांबी-रुंदीना 5 नं भागू. म्हणजे क्षेत्रफळाला 25 नं भागायला हवं. मग लांबी 6, रुंदी 5 आणि क्षेत्रफळ 12 असायला हवं. चौरसाकृती कोपरे असे कापायचे की तळाचं क्षेत्रफळ 12 येईल. मग कापलेल्या चौरसाची बाजू 2 असली पाहिजे हे नुसतं पाहूनच सांगता येतं. हे झालं आपण लहान केलेल्या पत्र्यापासून. म्हणून मूळ पत्र्याचे 2x5 = 10 सेमी बाजूचे चौरस कापायला हवेत. (ताळा करून पहाता का?)

उदा. 15: एकाच ठिकाणापासून निघालेल्या दोन ट्रॅक्टरांपैकी एक पूर्वेकडे आणि दुसरा उत्तरेकडे निघाला. एकाचा वेग दुसऱ्यापेक्षा ताशी 5 किमीनं अधिक आहे. दोन तासांनी त्यांच्यांतलं अंतर 50 किमी झालं. तर त्यांचे वेग किती?

ह्या हत्तीचा उंदीर आपण दोन टप्प्यांत करू. एक म्हणजे 5 किमी चा 1 एकक मानू. म्हणजे दोन तासांनी अंतर 10 एकक होईल. मग दुसऱ्या टप्प्यात, एक तासानं 5 एकक अंतर पडलं असतं ते लागलीच कळून येतं. आता मूळ स्थान आणि तासाभरानं असणारी त्यांची स्थानं हा काटकोन त्रिकोण आहे. त्याचा कर्ण 5 आहे. आणि एकाचा वेग दुसऱ्यापेक्षा 1 एककानं

अधिक आहे. म्हणजे एकजण 3 एकक अंतरावर पोचला तर दुसरा4 एकक अंतरावर पोचला. म्हणजेच त्यांचे वेग प्रतितास 3 आणि 4 एकक ठरले. किंवा (पुन्हा 5 नं गुणून) प्रतितास 15 किमी आणि 20 किमी ठरले. (ताळा करून पहाता का?)

उदा. 16: गोलाचं घनफळ त्रिज्येच्या घनाच्या प्रमाणात बदलतं. एका धातूचे 4.5, 6, 7.5 सेमी त्रिज्यांचे ती गोल वितळवून त्यांचा एकच गोल केला तर त्याची त्रिज्या किती असेल? (कारण गोलाच्या घनफळाचं सूत्र $v = (4/3)pi.r^3$ असं आहे. आणि (4/3)pi हा राशी स्थिर आहे.)

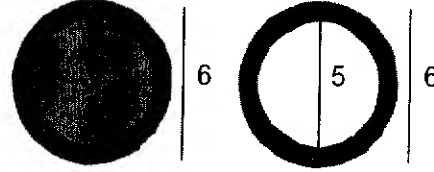
टीप: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ हे सूत्र सर्वांना माहीत असेल. मात्र, पायथागोरसची जशी असंख्य सोपी त्रिकुटं उपलब्ध आहेत, तशी घनफळाची नाहीत. त्यामुळं, सर्व उदाहरणं शेवटी ह्याच सूत्रापाशी येऊन ठेपतात, ही एकच गोष्ट आपण लक्षात ठेवायची. 3, 4, 5, 6 ह्याच संख्यांना एखाद्या संख्येनं गुणून नवीन संख्या मिळवल्याचा भास परीक्षक निर्माण करतात. त्यात आपण गुंतायचं नाही. इथंच पहा की ह्या चार संख्यांना 1.5 नं गुणून मिळालेल्याच तीन संख्या दिल्या आहेत. मग चौथी संख्या, 6 लाही 1.5 नं गुणूनच मिळेल. म्हणून नवीन गोलाची त्रिज्या 6x1.5 = 9 सेमी असेल.

आता तुमच्यापुढं प्रश्न असा 'पण उत्तर लिहायचं कसं?' त्याचं उत्तर असं - प्रथम $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ हे सूत्र लिहायचं. नंतर, गोलाचं घनफळ त्रिज्येच्या घनाच्याप्रमाणात बदलतं. म्हणून पहिल्या तीन गोलांची घनफळं $c.(4.5)^3$, $c.(6)^3$, $c.(7.5)^3$, अशी असतील. इथं c ही एक स्थिर संख्या आहे. म्हणून तिघांचं एकत्र घनफळ $c.[(4.5)^3 + c.(6)^3 + c.(7.5)^3]$ असेल. म्हणून नव्या गोलाचं क्षेत्रफळ $c(1.5)^3[3^3 + 4^3 + 5^3] = c(1.5)^3 6^3 = c(1.5x6)^3 = c.9^3$ असणार. म्हणून नव्या गोलाची त्रिज्या 9 सेमी असेल.

उदा. 17: गोलाचं घनफळ त्रिज्येच्या घनाच्या प्रमाणात बदलतं. धातूचे 3, 4 सेमी व्यासांचे दोन गोल वितळवून त्यांचा 6 सेमी व्यासाचा, समान जाडीचा एकच पोकळ गोल केला. त्याची जाडी किती?

इथं त्रिज्येऐवजी व्यास दिले आहेत. पण, आपण 'व्यास त्रिज्येच्या दुप्पट असल्यानं गोलाचं घनफळ व्यासाच्या प्रमाणात बदलतं,' असंही म्हणू शकतो. आता हा गोल पोकळ का राहिला? जर आपल्याकडे 5 सेमीचा

आणखी एक गोल असता तर $c.(3^3 + 4^3 + 5^3) = c.6^3$ ह्या सूत्रानुसार 6 सेमी व्यासाचा भरीव गोल मिळाला असता. याचाच दुसरा अर्थ पोकळ गोलाचा व्यास (आकृती पहा.) 5 सेमी असला पाहिजे. म्हणजेच गोलाची जाडी 0.5 सेमी असली पाहिजे.



म्हणून गोलांच्या उदाहरणांकरता $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ हे एक सूत्र सदैव लक्षात ठेवा. निष्कारण आकडेमोड करण्यात वेळ घालवायचा नाही. वाटल्यास एकदा प्रत्यक्ष किमती काढून खात्री करून घ्या.

आता बीजगणितातली काही उदाहरणं पाहू.

उदा. 18: a, b, c, d संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. तर नित्यसमीकरण $(ab + bc + cd)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$ दाखवा.

रीत 1: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ असं आपल्याला दिलं आहे. आता पहिल्या गुणोत्तराच्या अंशछेदांना aनं, दुस-याच्या अंशछेदांना bनं आणि तिस-याच्या अंशछेदांना cनं गुणून अंशांची व छेदांची बेरीज करू. मग प्रत्येक गुणोत्तर $= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + cd}$ मग पुन्हा पहिल्या गुणोत्तराच्या अंशछेदांना bनं, दुस-याच्या अंशछेदांना cनं आणि तिस-याच्या अंशछेदांना dनं गुणून अंशांची व छेदांची बेरीज करू. मग पुन्हा प्रत्येक गुणोत्तर $= \frac{ab + bc + cd}{b^2 + b^2 + c^2}$

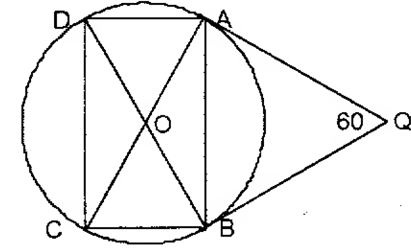
म्हणून ही दोन्ही गुणोत्तरं समान. तिरकस गुणाकारानं $(ab + bc + cd)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$ असं इष्ट उत्तर मिळतं.

रीत 2: नेहमीच्या k पद्धतीनं तर हे सुटेलच. पण त्या पद्धतीचाही निराळ्या त-हेनं कसा उपयोग करता येतो ते आता पाहू यात. प्रत्येक गुणोत्तर बरोबर

k मानू. मग आपल्याला (अ) a = bk, b = ck, c = dk असं लिहिता येईल. आणि (आ) b = a/k, c = b/k, d = c/k असंही लिहिता येईल. आता डावी बाजू अशी मांडून घेऊ. (ab + bc + cd)(ab + bc + cd). आणि पहिल्या कंसात (आ) चा उपयोग करू तर दुस-यात (अ) चा उपयोग करू मग डावी बाजू $= (a^2/k + b^2/k + c^2/k)(b^2k + c^2k + d^2k)$. आणि पहिल्या कंसातून 1/k तर दुस-यातून k समाईक काढून घेतल्यावर दोघांचा लोप होईल आणि राशी $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$ असा होईल.

आता एक सांगा. ही नवी रीत वाचल्यावर तुम्हाला काही वेगळा आनंद झाला की नाही?

उदा. 19: आता 2004 सालच्या परीक्षेत आलेला भूमितीचा एक प्रश्न पाहू. आकृती पहा. वर्तुळाच्या बाहेरील Q बिंदूतून वर्तुळाला QA, QB अशा दोन स्पर्शिका काढल्या. त्यांच्यातील कोन 60 दिला असून. नंतर आयत ABCD



पूर्ण केला. तर आयत ABCD आणि त्रि ABC ह्यांच्या क्षेत्रफळांचं गुणोत्तर काढा. हे उदाहरण आपण विविध प्रकारे सोडवू. आणि शेवटी हत्तीचा उंदीर करून दाखवू. मात्र मी सर्व पाय-यांच्या मागची कारणं देत बसणार नाही. ती तुम्ही शोधा. सर्व रीतींना लागणारी काही प्राथमिक माहिती एकत्र करू.

प्राथमिक: आयताचे कर्ण वर्तुळाच्या O केंद्रात परस्परांस दुभागतात. त्यामुळं (1) कोन QAO हा काटकोन ठरतो. त्रि QAB समभुज आहे. त्यामुळं कोन OAB = कोन OBA = 30 ठरतात. आणि कोन OCD = कोन ODC = 30. त्रि OAD, त्रि OCB सुद्धा समभुज ठरतात.

(2) शिवाय त्रि ABD ची OA मध्यगा आहे. त्यामुळं त्रि OAD, त्रि OAB यांची क्षेत्रफळं समान. (मध्यगा त्रिकोणाला दुभागते.)

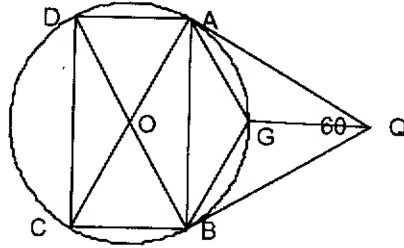
(3) त्याचप्रमाणं OAD, OAB, OCB, OCD ह्या सर्व त्रिकोणांची क्षेत्रफळं समान असणार.

(4) त्रि ABD 30-60-90 चा आहे. आणखी गुणधर्म लागतील तसतसे लिहू.

रीत 1: आता AD = 1 मानू. मग (4) मुळं बाजू AB = $\sqrt{3}$ असेल. तेव्हा, आयताचं क्षेत्रफळ $\sqrt{3}$ येणार. समभुज त्रिकोणाची बाजू a असेल तर त्याचं क्षेत्रफळ $\sqrt{3}a^2/4$ ह्या सूत्रानं मिळतं. इथं a = $\sqrt{3}$ आहे. म्हणून त्रि QAB चं क्षेत्रफळ $3\sqrt{3}/4$ असेल. आयत : त्रिकोण 4 = 3 असं उत्तर मिळतं.

रीत 2: OAD, QAB त्रिकोण समरूप आहेत. म्हणून त्यांची क्षेत्रफळं त्यांच्या बाजूंच्या वर्गांच्या प्रमाणात असतील. (4) मुळं त्रि OAD : त्रि QAB = 1 : 3 असणार. पण वर लिहून ठेवलेल्या गुणधर्म (3) वरून आयताचं क्षेत्रफळ OAD त्रिकोणाच्या चौपट. म्हणून आयत : त्रिकोण = 4 : 3.

तिसऱ्या रीतीकरता आकृतीत काही रचना करू. त्रि ABC च्या G



ह्या मध्यमासंपातामधून शिरोबिंदूंना जोडणाऱ्या रेषा काढू. नवा गुणधर्म लिहू

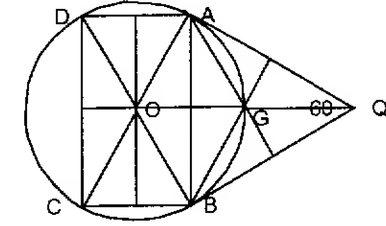
(5) GBQ, GQA, GAB, OAB, OCD हे त्रिकोण एकरूप असणार.

रीत 3: त्यावरून आयताचे चार भाग करणारे त्रिकोण आणि त्रिकोणाचे तीन भाग करणारे त्रिकोण ह्या सर्वांची क्षेत्रफळं सारखीच असणार. ह्यावरून पुन्हा आपल्याला आयत : त्रिकोण = 4 : 3 हेच उत्तर मिळतं. इथं तर आपण फारशी आकडेमोड केलीच नाही.

चौथ्या रीतीकरता आणखी एक रचना करू. O मधून आयताच्या सर्व बाजूंना लंब काढू. आणि G मधून त्रिकोणाच्या सर्व बाजूंना लंब काढू. किंवा मध्यगा पूर्ण करू, असं म्हणा. आकृती पहा.

(6) आयताचे भाग करणारे आठ काटकोन त्रिकोण आणि त्रिकोणाचे भाग

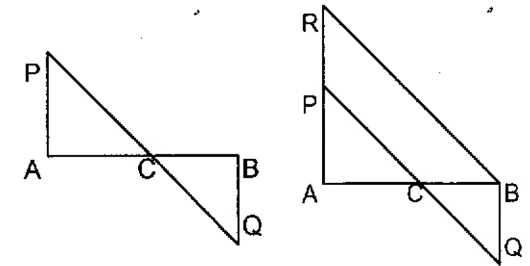
करणारे सहा काटकोन ह्यांचा एक गुणधर्म फार उपयुक्त आहे. त्यांची क्षेत्रफळं समान आहेत इतकंच नव्हे तर हे सगळे त्रिकोण एकरूप आहेत.



रीत 4: अर्थात त्या 14 त्रिकोणांची क्षेत्रफळं आपोआप समान असणार. म्हणून पुन्हा आयत : त्रिकोण = 8 : 6 = 4 : 3 हेच उत्तर मिळतं. इथंही आपण काही आकडेमोडच केली नाही. इथं मात्र, हत्तीचा उंदीर झाला.

आता एकच उदाहरण सांगतो. मात्र त्याच्या इतर रीती न देता. फक्त एक शेवटचा रामटोला सांगतो.

उदा. 20: AB हा एक रेषाखंड आहे. A आणि B पाशी AB ला लंब पण विरुद्ध दिशांना AP, BQ असे रेषाखंड काढले की AP + BQ = AB असेल. PQ रेषा AB ला 45 अंशात छेदते, असं दाखवा.



वर म्हटल्याप्रमाणं हे उदाहरण अनेक रीतींनी सोडवता येतं. आकृत्या काढून रीती सुचवल्या आहेत. त्यांचा विचार करून तुम्ही त्या शोधून पहा. आणि सर्व सिद्धता लिहा. वर म्हटल्याप्रमाणं हे उदाहरण अनेक रीतींनी सोडवता येतं.

रीत 2: आता तुम्ही प्रथम C पासचे विरुद्ध कोन सारखे आहेत, असं म्हणा

आणि ते 45 पेक्षा लहान किंवा मोठे असतील तर दोन्हीवरून विसंगत उत्तर मिळतं असं दाखवा. म्हणून ते 45 च असले पाहिजेत, अशी क्रमविरुद्ध सिद्धता द्या.

रीत 3: माझी रीत. R बिंदू असा घ्या की AR = AP असेल. मग आपोआपच CB = BQ मिळेल. आता PRQ ही सरळ रेषा दाखवा की झालं.

तुम्हाला आणखी काही रीती सुचतात का पहा.

तुमच्या मनातला प्रश्न: ही रीत बोर्डात चालेल का?

माझं उत्तर, 'मला माहीत नाही.' खरं सांगायचं तर आमच्या व्हिऑनगुरुजींना तर असली उत्तरं पाहून मनस्वी आनंद होत असे. पण झापडबंद परीक्षकांना आणि नियामकांना (मॉडरेटर), त्यामुळं शिक्षकांना चालतील की नाही, हे मी कसं सांगणार? असे झापडबंद शिक्षक महाविद्यालयांतही मला सापडले. दुसरा मुद्दा, परीक्षकांनी किंवा नियामकांनी चूक दिलं आहे की नाही, कोणत्या कारणास्तव चूक दिलं आहे, हे कळण्याचा मार्ग उपलब्ध नसतो. तेव्हा ते धोक्याचं आहे, हे मला मान्य आहे. मात्र, मी मांडलेल्या रीतींमध्ये तर्काला कुठंही फाटा दिला नाही. गणितानं पाहिलं तर एकूण एक रीती अगदी अचूक आहेत. पण लहान रीत म्हणजे काही तरी चुकीचंच असणार अशी जर समजूत करून घेतली तर माझ्या रीती चुकीच्या वाटणार, हे सरळ आहे. पण ह्याबाबत तुम्हाला स्वतःला काय वाटतं, ते आधी तुम्ही ठरवा. आणि परीक्षेत कोणत्या रीती ठेवायच्या त्याचा निर्णय करा. पण, परीक्षा पातळीवर, निदान आपापल्या शाळांत चालणारा हा वेडगळपणा थांबवायचा प्रयत्न शिक्षकांनीही करायला हवा. तसा प्रयत्न त्यांनी करावा, अशी माझी विनंती आहे.

तिसरा मुद्दा, जीवनात असे प्रश्न उद्भवलेच तर कसे सोडवले ते तुम्हाला कोण विचारणार आहे. म्हणून तुम्हाला ते प्रश्न सोडवण्याकरता अशा रीती उपयोगी ठरतील, यात काय शंका? कोणकोणते फायदे?

१) आकडे लहान झाल्यानं वेळ कमी लागतो. आणि चुकाही कमी होतात.
२) नवनवीन गुणधर्मांच्या वापरामुळं उजळणी होते. पुढच्या उदाहरणांत युक्ती सुचते.
३) अंकगणित, बीजगणित आणि भूमिती, सर्‍यांत वापर होतो.
४) पुस्तकातील अशा उदाहरणांची यादी करा आणि तेवढी सगळी सोडवून एक वहीत, स्वतंत्रपणं लिहून ठेवा.

ह्यात तुम्हाला यश मिळावं, म्हणून

शुभेच्छा